ತರಗತಿ ಕೋಣೆ

ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಒಂದು ಸುರುಳಿ

ಖುಷ್ಬೂ ಅವಸ್ಥಿ

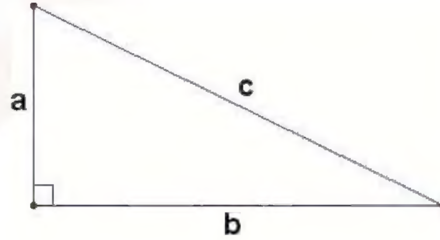
"ಗಣಿತವು ನಿರ್ಭಾವವೂ ಶುದ್ಧವೂ ಆದ ಸೌಂದರ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಆದರೂ ಘನವಾದ ನಿರ್ಮಲತೆ ಹೊಂದಿದೆ ಮತ್ತು ಕೇವಲ ಅತ್ಯುತ್ಕೃಷ್ಟ ಕಲೆ ಮಾತ್ರ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದಾದ ಕಠಿಣತಮ ಸಂಪೂರ್ಣತೆಯನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹೊಂದಿದೆ."

- ಬರ್ಟ್ರಾಂಡ್ ರಸೆಲ್

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವು ಯಾವಾಗಲೂ ಎಲ್ಲ ಹಿರಿಕಿರಿಯ ಗಣಿತಜ್ಞರಿಗೆ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾದ ವಿಷಯವಾಗಿದೆ. ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಒಂದು ಸುರುಳಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಹಲವಾರು ಉತ್ತೇಜನಕರ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಪರಿಚಯ ಇರುವ ಯಾವುದೇ ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ಮತ್ತು ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೂ ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಶೋಧಿಸಿರುವ ಬಹುತೇಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ

ಯಾವುದೇ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, ವಿಕರ್ಣ 'c'ಯ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ತಳ ಬಾಹು ಮತ್ತು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಾದ 'a' ಮತ್ತು 'b' ಯ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿ)



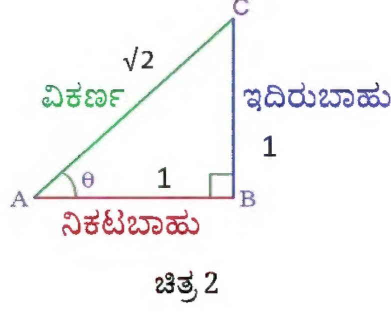
$$a^2 + b^2 = c^2$$

ಚಿತ್ರ 1

ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಸುರುಳಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವ ಹಂತಗಳು

1. A4 ಅಳತೆಯ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಏಕಮಾನ ಅಳತೆಯ AB ಗೆರೆಯನ್ನು ಕಾಗದದ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಿರಿ.
2. B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, ಏಕಮಾನ ಅಳತೆಯ ಲಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ (AB ಗೆರೆಯಷ್ಟೇ ಅಳತೆ ಉಳ್ಳದ್ದು) ಮತ್ತು ಇದನ್ನು BC ಎಂದು ಕರೆಯಿರಿ. ಈಗ ವಿಕರ್ಣ BC ಯ ಉದ್ದವು $\sqrt{2}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 2 ನೋಡಿ).
   ಇಲ್ಲಿ $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2$
   ಆದ್ದರಿಂದ $AC = \sqrt{2}$

ಮುಖ್ಯಪದಗಳು: ಪರಿಶೋಧನೆ, ಪೈಥಾಗೊರಸ್, ವರ್ಗಮೂಲಗಳು, ಸುರುಳಿ, ಕೋನ.

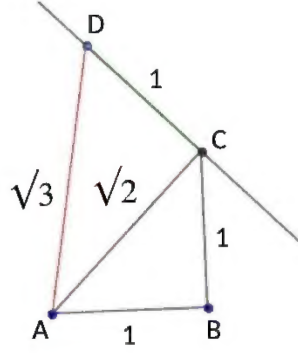


ಚಿತ್ರ 2

ಖಂಡ AC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಬಿಂದು A ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ AB ಯಷ್ಟೇ ಉದ್ದದ CD ಖಂಡ ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ನಂತರ AD ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ AD ರೇಖೆಯು ವಿಕರ್ಣ, AC ರೇಖೆಯು ತಳ ಬಾಹು, ಮತ್ತು AD ರೇಖೆಯು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಾದ ACD ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಿದ್ಧವಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ AD $= \sqrt{3}$ (ಚಿತ್ರ 3 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 3

3. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖಾ ಖಂಡ DE ಅನ್ನು (AB ಅಥವಾ CD ಯಷ್ಟೇ ಅಳತೆಗೆ) D ಬಿಂದುವಿನಿಂದ AD ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. AE ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಈಗ AE ವಿಕರ್ಣ, ಮತ್ತು AD ತಳ ಬಾಹು.

ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ ಅನುಸರಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಹೆಚ್ಚು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಒಂದೇ ಅಂಶವೆಂದರೆ ಎಲ್ಲ ಲಂಬಕೋನವುಳ್ಳ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವು ಏಕಮಾನ ಅಳತೆಯದೇ (AB ರೇಖೆಯ ಅಳತೆಯದೇ) ಆಗಿರಬೇಕು.

ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದಿರಿ? 5, 6, ...11, 12, 13,..., 16,..., n, n + 1,...?

ಪರಿಶೀಲನಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ನೀವು ರಚಿಸುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ, ಯಾವುದಾದರೂ ಆಕಾರವು ಮೂಡುತ್ತಿರುವುದು ನಿಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿತೆ?
2. ಯಾವ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ (n), ಈ ಸುರುಳಿಯು Y - ಅಕ್ಷವನ್ನು ದಾಟುತ್ತದೆ?
3. ಯಾವ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ (n), ಈ ಸುರುಳಿಯು X - ಅಕ್ಷವನ್ನು ದಾಟುತ್ತದೆ?
4. ಸುರುಳಿಯ ಬೀಸಣಿಗೆಯು ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ಭಾಸವಾಗುತ್ತಿದೆ. ನೀವೂ ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರೆ? ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೆ?
5. ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಮುಂದುವರೆದಂತೆ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿನ ಶೃಂಗ A ಯಲ್ಲಿ ರಚಿತವಾಗುವ θ_n ಕೋನ ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ?
6. θ_n ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೆಲೆ ಯಾವುದು?

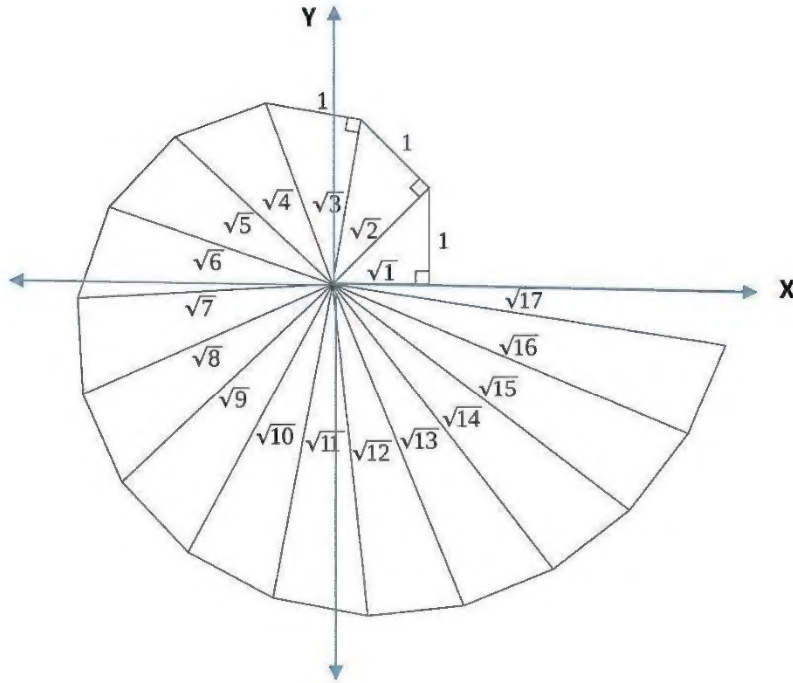
7. ಪ್ರತಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಲ್ಲೂ ನಾವು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಮಾರ್ಪಡಿಸುತ್ತಾ ಸಾಗಿದರೆ ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು ತಳ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಗೆ ರಚಿಸಿದರೆ ಸುರುಳಿಯ ಮೇಲೆ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಮಾರ್ಪಾಡು/ಪರಿಣಾಮ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ? ಆಗ ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಪಡುತ್ತದೆ? ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನವು ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ?

ಶಿಕ್ಷಕರ ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಈ ಕೆಳಕಂಡ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿರುವ ಪರಿಶೋಧನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಶಿಕ್ಷಕರು ಇವನ್ನು ಆಕರವಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಾವೇ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಲು ಸಾಕಷ್ಟು ಸಮಯ ಇರುವುದನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕರು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಅವಶ್ಯಕ.

1. **ನೀವು ರಚಿಸುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ, ಯಾವುದಾದರೂ ಆಕಾರವು ಮೂಡುತ್ತಿರುವುದು ನಿಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿತೆ?**

   ಹೌದು. ಚಿತ್ರ 4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಸುರುಳಿಯ ಆಕಾರವು ರಚನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 4

2. **ಯಾವ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ (n), ಈ ಸುರುಳಿಯು Y - ಅಕ್ಷವನ್ನು ದಾಟುತ್ತದೆ?**

   ಚಿತ್ರ 4 ರಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ, ಸುರುಳಿಯು Y - ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಗವನ್ನು $n = 3$ ಯಲ್ಲಿ ದಾಟುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದು ಅರಿಯಬೇಕಾದರೆ, $n = 2$ ಇರುವಾಗ ಸುರುಳಿಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಕೋನವು 90° ದಾಟಿಲ್ಲ ಮತ್ತು $n = 3$ ಆದಾಗ 90° ದಾಟಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಕೋಷ್ಟಕ 2 ನೋಡಿ.

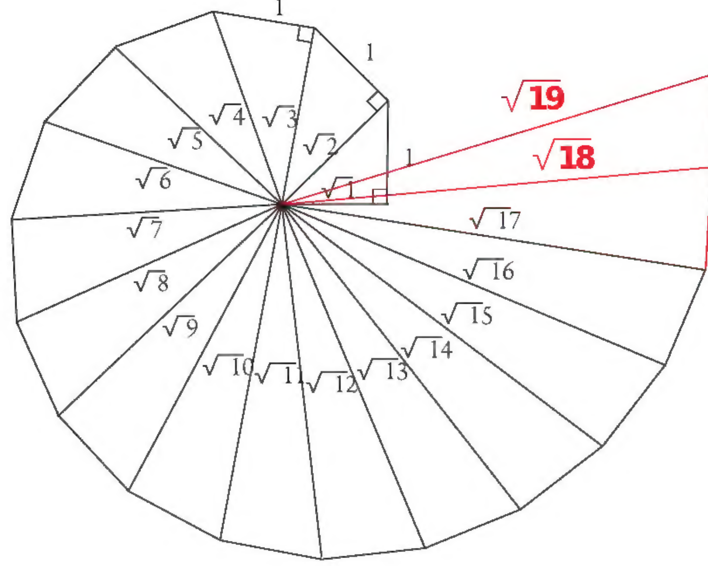
   ಸುರುಳಿಯು Y - ಅಕ್ಷದ ಋಣಾತ್ಮಕ ಭಾಗವನ್ನು ಯಾವಾಗ ದಾಟುತ್ತದೆ ಎನಿಸುತ್ತದೆ? ಅದನ್ನು ನೀವೇ ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚಿ.

3. **ಯಾವ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ (n), ಈ ಸುರುಳಿಯು X - ಅಕ್ಷವನ್ನು ದಾಟುತ್ತದೆ?**

   ಚಿತ್ರ 4 ರಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ, ಸುರುಳಿಯು X ಅಕ್ಷದ ಋಣಾತ್ಮಕ ಭಾಗವನ್ನು $n = 6$ ರಲ್ಲಿ ದಾಟುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೆ, ಇದನ್ನು ನಾವು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ ದೃಢಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. $n = 5$ ಇರುವಾಗ ಸುರುಳಿಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಕೋನವು 180° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ $n = 6$ ಆದಾಗ 180° ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ.

   ಸುರುಳಿಯು X ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಗವನ್ನು ಯಾವಾಗ ದಾಟುತ್ತದೆ ಎನಿಸುತ್ತದೆ?

   ರಚನೆ ಮುಂದುವರೆಸುತ್ತಾ ಸಾಗೋಣ. ಚಿತ್ರ 5 ನೋಡಿ.



ಚಿತ್ರ 5

4. **ಸುರುಳಿಯ ಬೀಸಣಿಗೆಯು ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ಭಾಸವಾಗುತ್ತಿದೆ. ನೀವೂ ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರೆ? ಇದನ್ನು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸಲು ಮಾರ್ಗವಿದೆಯೆ?**

ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ, ನಾವು ಆರಂಭಿಸಿದಾಗ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ತಳ ಬಾಹುವಿನ ಮತ್ತು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು ಏಕಮಾನ ಅಳತೆ ಇದ್ದಿತು. ಇದರಿಂದ ವಿಕರ್ಣ AC ಉದ್ದವು $\sqrt{2}$ ಆಯಿತು. (ಚಿತ್ರ 2 ನೋಡಿ).

ನಾವು ಅವಲೋಕಿಸಿದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸೋಣ. ತಳ ಬಾಹುವಿನ, ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಮತ್ತು ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ. ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. (ಕೋಷ್ಟಕ 1 ನೋಡಿ).

ಪುನರಾವರ್ತನೆ (n)	ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (n)	ತಳ ಬಾಹು (b)	ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು (a)	ವಿಕರ್ಣ (c)
1	1	1	1	$\sqrt{2}$
2	2	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{3}$
3	3	$\sqrt{3}$	1	.....
4	4	......	1	.....
5	5	......	1	.....
N	n	......	1	.....

ತಃಖ್ತೆ 1. ತಳ ಬಾಹು, ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಮತ್ತು ವಿಕರ್ಣಗಳ ಅಳತೆಗಳು

ಮೇಲ್ಕಂಡ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ, ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದೇ ಅಳತೆ ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ತಳ ಬಾಹು ಮತ್ತು ವಿಕರ್ಣದ ಅಳತೆಗಳು ಬದಲಾಗುತ್ತಾ ಸಾಗುತ್ತವೆ. ಪುನರಾವರ್ತನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು n ಆದರೆ ತಳ ಬಾಹು ಮತ್ತು ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? ಇದನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೆ?

ಕೋಷ್ಟಕ 1 ರಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಪುನರಾವರ್ತನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ n ಆದಾಗ,

ತಳ ಬಾಹು $= \sqrt{n}$

ವಿಕರ್ಣ $= \sqrt{n+1}$

ಆದ್ದರಿಂದ (n + 1)ನೆಯ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೆ

ತಳ ಬಾಹು = $\sqrt{n+1}$

ವಿಕರ್ಣ = $\sqrt{n+2}$

$n > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1}$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಇದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೂ ಸುರುಳಿಯ ಬೀಸಣಿಗೆಯ (ವಿಕರ್ಣ) ಉದ್ದವು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಸಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ನಾವು ತ್ರಿಕೋನಗಳೊಡನೆಯೇ ತೊಡಗಿಕೊಂಡಿರುವಾಗ ಕೋನಗಳ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸುವುದನ್ನು ಅಲಕ್ಷಿಸಲು ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯ?

ಪ್ರತಿ ಕ್ರಮಾಗತ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯೊಂದಿಗೆ ವಿಕರ್ಣದ ಅಳತೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದೆವು. θ_n ಕೋನದ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಇದೇ ಮಾತನ್ನು ಹೇಳಬಹುದೆ? (θ_n ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗವಾದ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರಚಿತವಾಗುವ ಕೋನ). ಪರಿಶೋಧಿಸೋಣ.

5. **ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಮುಂದುವರೆದಂತೆ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿನ ಶೃಂಗ A ಯಲ್ಲಿ ರಚಿತವಾಗುವ θ_n ಕೋನ ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ?**

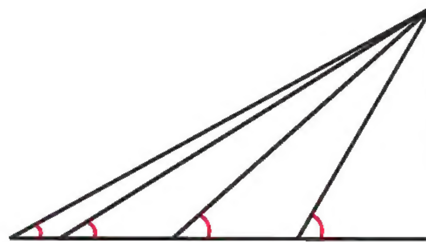
ಕೋನಮಾಪಕ ಬಳಸಿ ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ರೂಪುಗೊಂಡ θ_n ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟಕ 2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ದಾಖಲಿಸಿ. ಕೋನದ ಪ್ರಮಾಣವು ಕ್ರಮೇಣ ತಗ್ಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಇದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (n)	**ಕೋನ, θ_n**
1	45^0
2	......
.....	......

ತಃಖ್ತೆ 2. ಪ್ರತಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆ n ನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನ.

ಕೋನಗಳು ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ಅರಿಯಲು ಇನ್ನಾವುದಾದರೂ ಮಾರ್ಗ ಇದೆಯೆ?

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ತಳ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು ಕ್ರಮೇಣ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿದ್ದಂತೆ, ತಳ ಬಾಹುವಿನೊಡನೆ ವಿಕರ್ಣ ಹೊಂದುವ ಕೋನವಾದ θ_n ಕ್ರಮೇಣ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಸಾಗುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 6 ನೋಡಿ.



ಚಿತ್ರ 6

6. **θ_n ನ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಭಾವ್ಯ ಮೌಲ್ಯ ಏನು?**

ಪ್ರತಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಲ್ಲೂ ಕೋನವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಸಾಗಿದರೆ, ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನವು $n = 1$ ಆದಾಗ ರಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ.

ಕೋಷ್ಟಕ 2 ರಿಂದ, $n = 1$ ಆದಾಗ, $\theta_1 = 45°$.

ಎಂದರೆ, $45^0 > \theta_n > 0°$.

ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತದ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ, ಪ್ರತಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯೊಂದಿಗೆ $\sin \theta_n$ ಮತ್ತು $\cos \theta_n$ ಗಳು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅರಿಯುವುದು

ಆಸಕ್ತಿಕರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ,

$$\sin\theta_n = \frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ}}{\text{ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ}}$$

ಕೋಷ್ಟಕ 1 ರಿಂದ ನಾವು ತಿಳಿದಿರುವುದೇನೆಂದರೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಯು ಪ್ರತಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಮಾನವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದರಲ್ಲೇನೂ ಬದಲಾವಣೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಲೇ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಛೇದವು ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಾಗುತ್ತಾ ಸಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ n ಕೋನವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿದ್ದಂತೆ, $\sin\theta_n$ ಕ್ರಮೇಣ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 3 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ,

$n = 1$ ಆದಾಗ, $\sin\theta_n = 1/\sqrt{2}$.

ಎಂದರೆ $\theta_n = 45°$.

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (n)	ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು	ತಳ ಬಾಹು	ವಿಕರ್ಣ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
1	1	1	$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
2	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$
3	1	$\sqrt{3}$	.....	.....	......
4	......	......	.....	.....	......
5	......	......	.....	.....	......

ತಃಖ್ತೆ 3. ಪ್ರತಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ ತಳ ಬಾಹು, ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಮತ್ತು ವಿಕರ್ಣಗಳ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು.

7. **ಪ್ರತಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಲ್ಲೂ ನಾವು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಮಾರ್ಪಡಿಡುತ್ತಾ ಸಾಗಿದರೆ ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು ತಳ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಗೆ ರಚಿಸಿದರೆ ಸುರುಳಿಯ ಮೇಲೆ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಮಾರ್ಪಾಡು/ಪರಿಣಾಮ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ? ಆಗ ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಪಡುತ್ತದೆ? ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನವು ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ?**

ಪ್ರತಿ ಆವರ್ತದಲ್ಲೂ ತಳ ಬಾಹು ಮತ್ತು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಾಗಿಸಿಬಿಟ್ಟರೆ, ತ್ರಿಕೋನವು ದ್ವಿಸಮಬಾಹು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿಬಿಡುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ತತ್ಕಾರಣವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿನ ಕೋನವು ಎಲ್ಲ ಸಮಯದಲ್ಲೂ 45° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ತಳ ಮತ್ತು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ವಿಕರ್ಣದ ಅಳತೆಯ ಮೇಲೆ ಏನು ಪರಿಣಾಮವಾಗುತ್ತದೆ? ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದಂತೆ ವಿಕರ್ಣದ ಅಳತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದೇನು?

ಕೋಷ್ಟಕ 1 ರಂತೆಯೇ ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿ, ಪುನರಾವರ್ತನೆಯೊಡನೆ ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ ಮಾರ್ಪಡುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಕೋಷ್ಟಕ 4 ನೋಡಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯೊಡನೆ ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಸಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದು ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಸಾಬೀತಾಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ ಪ್ರತಿ ಸಮ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣವು ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಪಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 7 ನೋಡಿ).

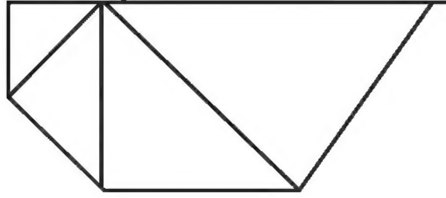
ಕೋಷ್ಟಕ 4 ರಿಂದಲೂ ಸಹ ಇದರ ಸ್ಥಾಪನೆ ಸಾಧ್ಯ; ಅದರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ θ_n ಕೋನವು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ 45° ಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸತತ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗಳ (n ಮತ್ತು ಮತ್ತು $n + 1$) ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಶೃಂಗಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 90° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$n = 1$ ಆದಾಗ, $\theta_n = 45°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ ಸಮ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣವು X ಅಕ್ಷದ ಅಥವಾ Y - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಅಂಶವೆಂದರೆ $n = 8$ ಆದಾಗ ಎಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸುರುಳಿಯು ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಅವರ್ತನ (n)	ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (n)	ತಳ (ತಳ ಬಾಹು) (b)	ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು (a)	ವಿಕರ್ಣ (c)	ಕೋನ, θ_n
1	1	1	1	$\sqrt{2}$	45^0
2	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4}$	45^0
3	3	$\sqrt{4}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{8}$	45^0
4	4	$\sqrt{8}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{16}$	45^0
5	5	$\sqrt{16}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{32}$	45^0
6	6	$\sqrt{32}$	$\sqrt{32}$	....	45^0
n	n	$\sqrt{2}$^(n – 1)	$\sqrt{2}$^(n – 1)	$\sqrt{2}$^(n)	45^0

ತಃಖ್ತೆ 4. ತಳ, ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಮತ್ತು ವಿಕರ್ಣದ ಅಳತೆ.



ಚಿತ್ರ 7

ಹಿಂದೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ಸುರುಳಿಯು ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದೆ? ನೀವು ಅದನ್ನು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸಬಲ್ಲಿರೆ?

ಈ ಪರಿಶೋಧನೆಯನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಿಸಿದಾಗ ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಯಾವ ವಿನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ತಿರುಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಆಸಕ್ತಿಕರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ:

1. ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಅವರ್ತಕ್ಕಿಂತ ಎರಡರಷ್ಟು ಮಾಡುವುದು.
2. ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ತಳ ಬಾಹುವಿನ ಎರಡರಷ್ಟು ಮಾಡುವುದು.
3. ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ, ಎಂದರೆ 1, 2, 3, 4, ಇತ್ಯಾದಿಗಳಷ್ಟು ಇರಿಸುವುದು.

ಪರಿಶೋಧನೆ ನಿರಂತರ ಸಾಗಲಿ...!



ಖುಷ್ಬೂರವರು ಮಂತ್ರ ಸೋಷಿಯಲ್ ಸರ್ವೀಸಸ್ (ಅಲಿಯಾಸ್ ಮಂತ್ರ 4 ಚೇಂಜ್) ಎಂಬ ಬೆಂಗಳೂರು ಕೇಂದ್ರಿತ ಸರ್ಕಾರೇತರ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಸಹ ಸಂಸ್ಥಾಪಕಿ ಮತ್ತು ನಿರ್ದೇಶಕಿಯಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಸಂಸ್ಥೆಯು ಶಿಕ್ಷಣ ಸೇವೆಯ ಕೊರತೆ ಇರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಗುಣಮಟ್ಟವನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸುವ ಕೈಂಕರ್ಯದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಕೊಂಡಿದೆ. ಟಾಟಾ ಇನ್‌ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ಆಫ್ ಸೋಷಿಯಲ್ ಸೈನ್ಸಸ್ (ಟಿಐಎಸ್‌ಎಸ್)ನಿಂದ ಮ್ಯಾನೇಜ್‌ಮೆಂಟ್ ಪದವಿ ಸಂಪಾದಿಸಿರುವ ಖುಷ್ಬೂರಿಗೆ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನ, ಆರೋಗ್ಯಪಾಲನೆ, ಶಿಕ್ಷಣ, ಉತ್ಪನ್ನ ನಿರ್ವಹಣೆ, ವ್ಯಾಪಾರಾಭಿವೃದ್ಧಿ ಮತ್ತು ಹೂಡಿಕೆದಾರ ನಿರ್ವಹಣೆಯಂತಹ ವಿವಿಧ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ 8 ವರ್ಷಕ್ಕೂ ಮಿಗಿಲಾದ ಅನುಭವವಿದೆ. ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲೂ ಆಸಕ್ತಿ ಕಂಡುಕೊಂಡ ಖುಷ್ಬೂ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಥವತ್ತಾದ ಕಲಿಕೆಯ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಸೃಜಿಸುವ ಕ್ರಮಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆಗೆ ತಮ್ಮ ಸಮಯವನ್ನು ವಿನಿಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

ಅನುವಾದ : ಎನ್. ರಾಮನಾಥ್

ಅಂಕಿಬಂಧ

ಉತ್ತರ: ಪುಟ 69ರಲ್ಲಿ

ಡಿ.ಡಿ. ಕರೋಪಡಿ & ಸ್ನೇಹ ಟೈಟಸ್

ಅನುವಾದ: ಎನ್. ರಾಮನಾಥ್

		1				2		
	3		4		5		6	
7			8				9	
	10	11			12	13		
	14		15		16		17	
18			19				20	
	21	22			23	24		

ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ	ಮೇಲಿನಿಂದ ಕೆಳಕ್ಕೆ
3. ಇದು ಪರಿಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಘನ	1. ಮೂರರ ವರ್ಗಮೂಲ ತಿರುಗಿದೆ
5. 19A – 14A	2. ಒಂದು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ
7. 30 ಮತ್ತು 40ರ ನಡುವಿನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	3. ಒಂದು ಮಿಲೆನಿಯಮ್‌ಗಿಂತ 223 ಕಡಿಮೆ
8. ಅಂಕಿಯೊಂದರ ವರ್ಗದಿಂದ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ದೊರೆತ ಅಂಕಿ	4. ಒಂಬತ್ತೂವರೆ
9. ಒಂದು ಸ್ಕೋರ್	5. ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ
10. 6 ಶ್ರೇಣಿಲಬ್ಧ	6. ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಗಳು
12. 7ರ ಗುಣಕ	11. ಪರಿಪೂರ್ಣ ಘನ
14. 2020ರಲ್ಲಿ ಇರುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	13. ಹೊಸ ಅವತಾರದಲ್ಲಿ ಹಳೆಯ ನೋಟು
16. ಹೊಸ ಕರೆನ್ಸಿ ನೋಟು 4ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ 6 ಸೇರಿಸಿದಾಗ	14. 14A – 20A ಯ 5 ರಷ್ಟು
18. ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯಾದ ಎಣಿಕೆಯ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಅಂಕಿ ಮೂಲ	15. 17D ಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ
19. ಬೋಯಿಂಗ್ ವಿಮಾನದ ವಿನ್ಯಾಸವೊಂದರ ಸಂಖ್ಯೆ	16. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಗಳು
20. ದುರದೃಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆ	17. ಮೊದಲ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ
21. ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾದ ಅಂಕಿಗಳು	22. 144ರ ವರ್ಗಮೂಲ
23. ಕಡೆಯ ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ	24. 20A ಅನ್ನು 7 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಷ್ಟು